Stoffübersicht zu Mathematik 4

Eine vollständige Übersicht der in Ralf Holtkamps Vorlesungsskript *Mathematik 4 für Studierende der Physik* vorkommenden Begriffe und Ergebnisse in der dortigen Gliederung und Reihenfolge.

Zeichenerklärung:

D . . .	Verweis auf eine **D**efinition durch (eventuell verkürzte) Benennung des durch sie erklärten Begriffs
R „ . . . “	Verweis auf ein **R**esultat durch (in der Regel verkürzte) Wiedergabe seiner *Aussage*
R . . .	Verweis auf ein **R**esultat durch Nennen seines *Namens* oder (meist grobe) Beschreibung seines *Inhalts*

0 Wiederholungen und Ergänzungen

0.1 Komplexe Zahlen

D $\mathbb{C}$ als Menge (Bemerkung 0.1.1 1.)
D **Realteil** und **Imaginärteil** (Bemerkung 0.1.1 1.)
D **Komplex Konjugiertes** (Bemerkung 0.1.1 1.)
D **Betrag** (Bemerkung 0.1.1 1.)
R C^*-Identität für $\mathbb{C}$ (Bemerkung 0.1.1 1.)
D **Hauptargument** (Bemerkung 0.1.1 2.)
D **Polarkoordinaten** (Bemerkung 0.1.1 2.)
R Darstellung mittels Polarkoordinaten (Bemerkung 0.1.1 2.)
R Berechnung des Hauptarguments über arccos (Bemerkung 0.1.1 2.)
R Multiplikation in Polarkoordinaten (Bemerkung 0.1.1 3.)
R Kehrwert in Polarkoordinaten (Bemerkung 0.1.1 3.)
D **Metrik** von $\mathbb{C}$ (Bemerkung 0.1.2.)
R „$\mathbb{C}$ ist metrisch vollständig“ (Bemerkung 0.1.2.)
R „$\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ sind homöomorph“ (Bemerkung 0.1.2.)
R Charakterisierung von Offenheit in $\mathbb{C}$ (Bemerkung 0.1.2.)
D **Hauptzweig** von log (Bemerkung 0.1.3. 1.)
R Umkehrfunktion des Hauptzweigs von log (Bemerkung 0.1.3. 1.)
R „Hauptzweig von log ist auf $]-\infty, 0[$ überall unstetig“ (Bemerkung 0.1.3. 2.)
R Bild und Umkehrfunktion von log auf $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ (Bemerkung 0.1.3. 3.)

R Wohldefiniertheit des Konvergenzradius einer komplexen Potenzreihe (Bemerkung 0.1.4. 1.)
D **Konvergenzradius** einer komplexen Potenzreihe (Bemerkung 0.1.4. 2.)
R Cauchy-Hadamardsche Formel für komplexe Potenzreihen (Bemerkung 0.1.4. 3.)
R Aus dem Quotientenkriterium folgende Ungleichung für Konvergenzradius komplexer Potenzreihen (Bemerkung 0.1.4. 3.)

0.2 Integration von Differentialformen und der Stokessche Integralsatz

D **Rücktransport** einer Differentialform (Definition 0.2.1)
R „Rücktransport ist $\mathbb{R}$-linear“ (Satz 0.2.2 1.)
R „Rücktransporti ist $\wedge$-multiplikativ“ (Satz 0.2.2 2.)
R „Rücktransport vertauscht mit äußerer Ableitung“ (Satz 0.2.2 3.)
R „Rücktransport entlang Komposition ist Opkomposition der Rücktransporte“ (Satz 0.2.2 4.)
R Koordinatendarstellung des Rücktransports einer 1-Form (Beispiel 0.2.3 1.)
R Koordinatendarstellung des Rücktransports einer Form maximalen Grads (Beispiel 0.2.3 2.)
R Koordinatendarstellung des Rücktransports einer Form maximalen Grads durch eine Endofunktion (Beispiel 0.2.3 2.)
D **Integrierbarkeiten** einer Form (Definition 0.2.4)
D **Integrale** einer Form (Definition 0.2.4)
R Jede stetige Form ist über Kompakta integrierbar (vor Definition 0.2.5)
D **Orientierungserhaltender** und **-umkehrender** Diffeomorphismus (vor Definition 0.2.5)
R „Diffeomorphismen mit wegzusammenhängendem Definitionsbereichen sind orientierungserhaltend oder -umkehrend“ (Satz 0.2.6)
R Integrale des Rücktransports einer Form entlang orientierungserhaltenden oder -umkehrenden Diffeomorphismen (Satz 0.2.6)
D **Atlas** (Definition 0.2.7 1.)
D **Orientierbarkeit** einer Mannigfaltigkeiten (Definition 0.2.7 2.)
D **Orientierung** einer Mannigfaltigkeit (Definition 0.2.7 3.)
D **Positiv** und **negativ orientierte Parametrisierungen** einer orientierten Mannigfaltigkeit (Definition 0.2.7 4.)
D **Entgegengesetzte Orientierung** einer orientierten Mannigfaltigkeit (vor Definition 0.2.8)
R Wohldefiniertheit von Integralen einer Form auf einer orientierten Mannigfaltigkeit (Definition 0.2.8)
R **Integrale** einer Form auf einer orientierten Mannigfaltigkeit (Definition 0.2.8)
D **Positiv orientierte Basis** des Tangentialraums einer orientierten Mannigfaltigkeit (Definition 0.2.9 1.)
D **Positiv orientiertes Einheitsnormalenfeld** einer Hyperfläche (Definition 0.2.9 2.)
R „Orientierungen von Hyperflächen entsprechen positiv orientierten Einheitsnormalenfeldern“ (Bemerkungen 0.2.10 1. u. 2.)

D **Kanonische Orientierung** des glatten Rands (Bemerkungen 0.2.10 3.)
R Beschreibung der Integrale einer Form auf einer Hyperfläche als Hyperflächenintegrale eines Vektorfelds (Satz 0.2.11)
D Kartesischer **Halbraum** als Menge mit glattem Rand (Definition 0.2.12 1.)
D **Rand** bezüglich einer Mannigfaltigkeit (Definition 0.2.12 2.)
D **Randadaptierte Parametrisierung** bezüglich einer Mannigfaltigkeit (Definition 0.2.12 3.)
D Menge mit **glattem Rand** bezüglich einer Mannigfaltigkeit (Definition 0.2.12 3.)
R „Rand bezüglich Mannigfaltigkeit ist selbst Mannigfaltigkeit mit um 1 niedrigerer Dimension“ (Betrachtung 0.2.13 1.)
D **Induzierte Orientierung** auf dem Rand bezüglich einer orientierten Mannigfaltigkeit (Betrachtung 0.2.13 2.)
R „Im kartesischen Fall ist auf dem Rand kanonische gleich induzierter Orientierung“ (Betrachtung 0.2.13 3.)
R Satz von Stokes für Formen mit kompaktem Träger (Lemma 0.2.14)
R Satz von Stokes (Theorem 0.2.15)
R Satz von Stokes für vollen Integrationsbereich (Korollar 0.2.16)
R Klassischer Satz von Stokes als Spezialfall des Satzes von Stokes (Bemerkung 0.2.17 1.)
R Klassischer Satz von Gauß als Spezialfall des Satzes von Stokes (Bemerkung 0.2.17 2.)

1 Funktionentheorie

1.1 Komplexe Differenzierbarkeit

D **Gebiet** (vor Definition 1.1.1)
D **Komplexe Differenzierbarkeit** in einem Punkt (Definition 1.1.1 1.)
D **Holomorphie** in einem Punkt (vor Definition 1.1.1 2.)
D **Holomorphie** (vor Definition 1.1.1 3.)
R „Konstante Funktionen sind holomorph“ (Beispiel 1.1.2 1.)
R „Komplexkonjugation ist nirgends komplex differenzierbar“ (Beispiel 1.1.2 2.)
R Summenregel für komplexe Differentiation (Bemerkungen 1.1.3 1.)
R Produktregel für komplexe Differentiation (Bemerkungen 1.1.3 1.)
R Kettenregel für komplexe Differentiation (Bemerkungen 1.1.3 1.)
R Satz von de l'Hospital für komplexe Differentiation (Bemerkungen 1.1.3 1.)
R „Komplexe Polynome sind holomorph“ (Bemerkungen 1.1.3 1.)
R Landau-o-Charakterisierung der komplexen Differenzierbarkeit (Bemerkungen 1.1.3 2.)
D **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen** (Satz 1.1.4)
R „Komplexe Differenzierbarkeit ist reelle plus Cauchy-Riemann“ (Satz 1.1.4)
R „Komplexe Ableitung ist erste partielle reelle“ (vor Korollar 1.1.5)
R „Komplexe Ableitung null bedeutet Konstanz auf Komponenten“ (Korollar 1.1.5)
R „Real- und Imaginärteile einer holomorphen Funktion sind harmonisch“ (Korollar 1.1.6)
D **Cauchy-Riemannscher Differentialoperator** (Bemerkung 1.1.8)
D **Wirtinger-Kalkül** (Bemerkung 1.1.9)

- **R** „Komplexe Potenzreihen sind im offenen Konvergenzkreis holomorph“ (Bemerkung 1.1.9)
- **R** Formel für komplexe Ableitung einer Potenzreihe (Bemerkung 1.1.9)
- **R** Holomorphie und komplexe Ableitungen von exp, sin und cos (Beispiel 1.1.11 1.)
- **R** Holomorphie und komplexe Ableitung von log (Beispiel 1.1.11 2.)
- **R** Jacobi-Determinante einer komplex differenzierbaren Funktion (Beispiel 1.1.11 2.)
- **D** **Konforme $\mathbb{R}$-lineare Abbildung** (Definition 1.1.13 1.)
- **D** Äquivalente Charakterisierung konformer $\mathbb{R}$-linearer Abbildungen (Definition 1.1.13 1.)
- **D** **Konforme $\mathbb{R}$-differenzierbare Abbildung** (Definition 1.1.13 2.)
- **R** Konforme lineare Abbildungen erhalten Winkel (Bemerkungen 1.1.14 1.)
- **D** **Ähnlichkeitsmatrix** (Bemerkungen 1.1.14 2.)
- **R** Wegschnittwinkel-Charakterisierung von konformen differenzierbaren Abbildungen (Bemerkungen 1.1.14 3.)
- **R** Charakterisierung der Konformität $\mathbb{R}$-differenzierbarer Endofunktionen von $\mathbb{C}$ (Satz 1.1.15)
- **R** „Holomorphe Funktionen sind konform, wenn ihre komplexen Ableitung nicht null ist“ (Korollar 1.1.16)
- **R** „Konforme holomorphe Funktionen sind orientierungserhaltend“ (Korollar 1.1.16)
- **D** **Komplex analytische** Funktion (Definition 1.1.17)
- **D** **Höhere komplexe Differenzierbarkeit** und **höhere komplexe Ableitungen**
- **R** „Komplex analytische Funktion sind unendlich oft komplex differenzierbar“
- **R** Formel für Taylorkoeffizienten komplex analytischer Funktionen (Definition 1.1.18 1.)
- **R** „Nullstellen analytischer Funktionen sind isoliert“ (Satz 1.1.19)

1.2 Komplexe Kurvenintegrale

- **D** **Komplexwertige Diffferentialform** (Betrachtung 1.2.1 1.)
- **D** **Außere Ableitung** einer komplexwertigen $\mathbb{R}$-differenzierbaren Form (Betrachtung 1.2.1 1.)
- **D** **Äußeres Produkt** komplexwertiger Formen (Betrachtung 1.2.1 1.)
- **R** Differential einer $\mathbb{C}$-differenzierbaren 0-Form (Betrachtung 1.2.1 2.)
- **D** **Holomorphe Stammfunktion** (Definition 1.2.2)
- **D** **Kurve** (Definition 1.2.3 1.)
- **D** **Spur** einer Kurve (Definition 1.2.3 1.)
- **D** **Anfangs-** und **Endpunkt** einer Kurve (Definition 1.2.3 2.)
- **D** **Geschlossene Kurve** (Definition 1.2.3 2.)
- **D** **Sich auf einen Punkt reduzierende Kurve** (Definition 1.2.3 2.)
- **R** Wohldefiniertheit der entgegengesetzten Kurve einer Kurve (Definition 1.2.3 3.)
- **D** **Entgegengesetzte Kurve** einer Kurve (Definition 1.2.3 3.)
- **R** Wohldefiniertheit der Aneinanderreihung zweier Kurven (Definition 1.2.3 3.)
- **D** **Aneinanderreihung** zweier Kurven (Definition 1.2.3 3.)
- **D** **Äquivalenz von Kurven** (Definition 1.2.4)
- **R** „Äquivalenz von Kurven ist Äquivalenzrelation“ (Bemerkungen 1.2.5 1.)
- **D** **Kuvenintegral** einer Funktionen mit Werten in einem komplexen Banachraum

(Definition 1.2.7)
R „Kuvenintegral hängt nur von der Äquivalenzklasse der Kurve ab“ (Lemma 1.2.8 1.)
R „Kuvenintegral über entgegengesetzte Kurve ist die Gegenzahl“ (Lemma 1.2.8 2.)
R „Kuvenintegral über Anneinanderreihung von Kurven ist die Summe“ (Lemma 1.2.8 3.)
R Kuvenintegrale einer Funktion mit holomorpher Stammfunktion (Bemerkungen 1.2.9)
R Verallgemeinerte Dreiecksungleichung für Kuvenintegrale (Lemma 1.2.11)
D **Homotopie** (Definition 1.2.12 1.)
D **Homotopie mit festen Endpunkten** (Definition 1.2.12 1.)
R „Homotopien bestehen aus Kurven“ (Definition 1.2.12 2.)
D **Konturhomotopie** (Definition 1.2.12 2.)
D Auf einen Punkt **zusammenziehbare** Kurve (Definition 1.2.12 3.)
D **Einfach zusammenhängendes** Gebiet (Definition 1.2.12 3.)
R „Homotopie ist Äquivalenzrelation“ (Satz 1.2.13)
R „Sternförmige Gebiete sind einfach zusammenhängend“ (Satz 1.2.14 1.)
R „Homöomorphismen erhalten einfachen Zusammenhang“ (Satz 1.2.14 2.)
R „Aneinanderreihung der entgegengesetzten Kurve liefert zu einem Punkt homotope Kurve“ (Bemerkungen 1.2.15 1.)
R „Aneinanderreihung respektiert Homotopieklassen“ (Bemerkungen 1.2.15 2.)
R „Aneinanderreihung modulo Homotopie ist assoziativ“ (Bemerkungen 1.2.15 2.)
D **n-fach durchlaufener Einheitskreis** (Bemerkungen 1.2.15 4.)
R Wohldefiniertheit des Index (Satz 1.2.16)
D **Index** einer geschlossenen Kurve (Satz 1.2.16)
D **Homologie** von geschlossenen Kurven (Definition 1.2.17 1.)
D **Nullhomologe** geschlossene Kurve (Definition 1.2.17 1.)
D **Zyklus** (Definition 1.2.17 2.)
D **Spur** eines Zyklus (Definition 1.2.17 2.)
D **Zyklusintegral** (Definition 1.2.17 2.)
D **Index** eines Zyklus (Definition 1.2.17 2.)
D **Homologie** von Zyklen (Korollar 1.3.3)
D **Nullhomologe** Zyklen (Definition 1.2.17 1.)
R Homologische Charakterisierung des einfachen Zusammenhangs (Bemerkungen 1.2.18)

1.3 Cauchyscher Integralsatz und Integralformel

R Cauchyscher Integralsatz für nullhomologe Zyklen (Theorem 1.3.2)
R Cauchyscher Integralsatz (Korollar 1.3.3)
R „Kurvenintegral holomorpher Funktionen ist homotopieinvariant“ (Korollar 1.3.3)
R „Index ist komponentenweise konstant“ (Bemerkungen 1.3.6 1.)
R „Index einer Kurve innerhalb einer Scheibe verschwindet außerhalb“ (Bemerkungen 1.3.6 2.)
D **Hebbare Singularität** (Definition 1.3.7)
R „Integral über Schleife um hebbare Singularität verschwindet“ (Bemerkungen 1.3.9)
R Cauchysche Integralformel für nullte Ableitung (Theorem 1.3.10)
R „Holomorphe Funktionen sind analytisch“ (Theorem 1.3.12)

R „Holomorphe Funktionen sind unendlich oft komplex differenzierbar“ (Korollar 1.3.13 1.)
R „Holomorphe Funktionen haben isolierte Singularitäten“ (Korollar 1.3.13 2.)
R Cauchysche Integralformel (Theorem 1.3.14)
R Standardabschätzung für Ableitungen holomorpher Funktionen (Theorem 1.3.10)
R Satz von Liouville (Satz 1.3.16)
R Fundamentalsatz der Algebra (Korollar 1.3.17)

1.4 Laurentzerlegung

D **$\mathbb{Z}$-indizierte Reihe** (Definition 1.4.1 1.)
D **Konvergenz** einer $\mathbb{Z}$-indizierten Reihe (Definition 1.4.1 1.)
D **Wert** einer konvergenten $\mathbb{Z}$-indizierten Reihe (Definition 1.4.1 1.)
D **Absolute Konvergenz** einer $\mathbb{Z}$-indizierten Reihe (Definition 1.4.1 2.)
D **Gleichmäßige Konvergenz** einer $\mathbb{Z}$-indizierten Funktionenreihe (Definition 1.4.1 2.)
D **Laurentreihe** komplexer Zahlen (Definition 1.4.1 3.)
D **Haupt-** und **Nebenteile** einer Laurentreihe (Definition 1.4.1 3.)
D **Konvergenz** einer Laurentreihe (Definition 1.4.1 3.)
R Wohldefiniertheit der Konvergenzadien einer Laurentreihe (Bemerkungen 1.4.2)
D **Konvergenzradien** einer Laurentreihe (Bemerkungen 1.4.2)
R „Laurentreihen sind im offenen Konvergenzkreisring holomorph“ (Bemerkungen 1.4.3)
R Formel für komplexe Ableitungen einer Laurentreihe (Bemerkungen 1.4.3)
R „Laurentreihen mit Residuum null haben Stammfunktionen“ (Bemerkungen 1.4.3)
R Stammfunktion einer Laurentreihe mit Residuum null (Bemerkungen 1.4.3)
R Integralformel für Laurentkoeffizienten (Satz 1.4.5)
R Laurentzerlegung holomorpher Funktionen (Satz 1.4.6)
R Riemannscher Hebbarkeitssatz (Satz 1.4.9)
D **Pol** einer holomorphen Funktion (Definition 1.4.10 2.)
D **Wesentliche Singularität** einer holomorphen Funktion (Definition 1.4.10 3.)
D **Ordnung** einer isolierten Stelle einer holomorphen Funktion (Definition 1.4.10)
R Isolierte Stellen von Laurentreihen (Bemerkungen 1.4.12)
R Ordnungen bezüglich der Summe von Funktionen (Lemma 1.4.13 1.)
R Ordnungen bezüglich des Produkts von Funktionen (Lemma 1.4.13 1.)
R Ordnungen bezüglich des Kehrwerts einer Funktion (Lemma 1.4.13 2.)
D **Meromorphe** Funktion (Definition 1.4.15)
R Rationale komplexe Funktion sind meromorph (Beispiel 1.4.16 1.)
R Satz von Picard (Satz 1.4.17)

1.5 Der Residuensatz

D **Residuen** einer analytischen Funktion (Definition 1.5.1)
R Integralformel für Residuen (Bemerkungen 1.5.1)
R „Residuen bezüglich hebbaren Singularitäten sind null“ (Bemerkungen 1.5.2 2.)
R Formel für Residuen bezüglich Polen (Bemerkungen 1.5.2 3.)
R Formel für Residuen bezüglich Polen erster Ordnung von Quotienten (Beispiel 1.5.3 4.)

D **Logarithmische Ableitung** (Beispiel 1.5.3 6.)
R Residuen der logarithmischen Ableitung (Beispiel 1.5.3 6.)
R Residuensatz (Theorem 1.5.4)
R Integralberechnung mittels Residuensatz, Typ 1 (Korollar 1.5.6)
R Integralberechnung mittels Residuensatz, Typ 2a (Korollar 1.5.8)
R Integralberechnung mittels Residuensatz, Typ 2b (Korollar 1.5.10 und Bemerkung 1.5.11)
R Integralberechnung mittels Residuensatz, Typ 3a (Korollar 1.5.13)
R Integralberechnung mittels Residuensatz, Typ 3b (Korollar 1.5.15)

2 Funktionalanalysis

In Arbeit.