Mathematik 4 - Anleitung 1

Im Folgenden eine Verschriftlichung eines Teils der Bemerkungen, die ich in der ersten Sitzung der Anleitung zu den Übungen von Mathematik 4 für Studierende der Physik am 5.4.2024 gegeben habe – zuzüglich einiger weitererer Anmerkungen zur Vorbereitung der Präsenzaufgaben der zweiten Sitzung der Übungen von Mathematik 4 für Studierende der Physik am 16.04.2024.

Potenzreihen

Bei Potenzreihen ist zu unterscheiden zwischen *formalen Potenzreihen* und den *von ihnen induzierten Funktionen.*

1 Formale Potenzreihen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (im Sinne von Folie 31 ff. von Mathe 1), zum Beispiel $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Statt Z ließe sich unten auch jedes beliebige andere Symbol nehmen.

Definition 1.1. Die *formalen Potenzreihen* $\mathbb{K}[[Z]]$ *in der Unbekannten* Z *mit Koeffizienten aus* $\mathbb{K}$ sind der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ (siehe Folie 319 von Mathe 1) der Abbildungen $\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ zusammen mit dem *Cauchyprodukt*: der Abbildung

$$\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{K})^2 \to \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{K}),\ (f_1,f_2)\mapsto f_1\cdot f_2$$

mit der Eigenschaft, dass für alle $(f_1,f_2)\in \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{K})^2$ die Abbildung $f_1\cdot f_2$ für alle $n\in\mathbb{N}$ erfüllt:

$$(f_1\cdot f_2)(n) \coloneqq \sum_{\substack{(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2\\ k_1+k_2=n}} f_1(k_1)f_2(k_2).$$

Notation 1.2. Für $f\in\mathbb{K}[[Z]]$ wird ab jetzt statt f auch $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,Z^n$ geschrieben.

Das ist lediglich eine andere Schreibweise, die Werte einer Abbildung $\mathbb{N}\to\mathbb{K}$ anzugeben. Es ist *keine* Ausage über Konvergenz, nicht einmal über Addition. Beispielsweise ist $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,Z^n$ eine formale Potenzreihe.

Bemerkung 1.3. Für alle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,Z^n\in\mathbb{K}[[Z]]$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,Z^n\in\mathbb{K}[[Z]]$ und $\lambda\in\mathbb{K}$ ist dann nach Definition

$$\begin{aligned}
\left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,Z^n\right)+\left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,Z^n\right) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)\,Z^n,\\
\lambda\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,Z^n &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n\,Z^n,\\
\left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,Z^n\right)\cdot\left(\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,Z^n\right) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,Z^n.
\end{aligned}$$

Formale Potenzreihen lassen sich „ableiten“.

Definition 1.4. Für jedes $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n \in \mathbb{K}[[Z]]$ heißt die formale Potenzreihe $A' := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} Z^n$ die *formale Ableitung* von A.

Die formale Ableitung folgt natürlich denselben Regeln wie die von Funktionen.

Satz 1.5. *Für alle $A \in \mathbb{K}[[Z]]$ und $B \in \mathbb{K}[[Z]]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten*

$$\begin{aligned}(A+B)' &= A' + B',\\ (\lambda\, A)' &= \lambda\, A',\\ (A \cdot B)' &= A' \cdot B + A \cdot B'.\end{aligned}$$

2 Interpretation als Funktionen

Sei nun $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Dann ist definiert, wann eine Folge in $\mathbb{K}$ konvergiert.

Definition 2.1. Für jedes $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n \in \mathbb{K}[[Z]]$ seien

$$\operatorname{dom} \underline{A} := \{z \in \mathbb{K} \wedge (\textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert in } \mathbb{K}\}$$

und

$$\underline{A} \colon \operatorname{dom} \underline{A} \to \mathbb{K},\ z \mapsto \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

die *von A induzierte partielle $\mathbb{K}$-Endofunktion.*

Für die beiden möglichen Wahlen von $\mathbb{K}$ ergeben sich unterschiedliche Funktionen.

Bemerkung 2.2. Es gilt $0 \in \operatorname{dom} \underline{A}$ und daher $\operatorname{dom} \underline{A} \neq \emptyset$ für alle $A \in \mathbb{K}[[Z]]$. Es kann durchaus $\operatorname{dom} \underline{A} = \{0\}$ sein, z.B. für $A = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, Z^n$.

Die Abbildung $\mathbb{K}[[Z]] \to \{f \,|\, \exists D \subseteq \mathbb{K} \colon f \colon D \to \mathbb{K}\}$, $A \mapsto \underline{A}$, die Potenzreihen als Funktionen deutet, verträgt sich mit den Operationen von $\mathbb{K}[[Z]]$ – zumindest auf der Ebene der Funktionswerte, nicht jedoch notwendig, was die Definitionsbereiche angeht.

Satz 2.3. *Für alle $A \in \mathbb{K}[[Z]]$ und $B \in \mathbb{K}[[Z]]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten*

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} \underline{A+B} &\supseteq \operatorname{dom} \underline{A} \cap \operatorname{dom} \underline{B},\\ \operatorname{dom} \underline{\lambda\, A} &= \operatorname{dom} \underline{A},\\ \operatorname{dom} \underline{A \cdot B} &\supseteq \operatorname{dom} \underline{A} \cap \operatorname{dom} \underline{B}\end{aligned}$$

und für alle $z \in \mathbb{K}$, wofür die jeweiligen Reihen auf der rechten Seite konvergieren,

$$\begin{aligned}\underline{A+B}(z) &= \underline{A}(z) + \underline{B}(z)\\ \underline{\lambda\, A}(z) &= \lambda\, \underline{A}(z)\\ \underline{A \cdot B}(z) &= \underline{A}(z) \cdot \underline{B}(z).\end{aligned}$$

Tatsächlich lässt sich viel über die Definitionsbereiche von Potenzreihenfunktionen sagen.

3 Definitionsbereiche der Funktionen

Dazu bedarf es möglicherweise einiger Ergänzungen zum Stoff von Mathe 1. Je nachdem, in welchem Jahrgang Sie waren, wissen Sie dies schon oder nicht.

3.1 Einschub: Supremum und Infimum

Jede nach oben (unten) beschränkte nicht leere Teilmenge A von $\mathbb{R}$ hat eine größte obere (kleinste untere) Schranke, das *Supremum* $\sup A$ (*Infimum* $\inf A$) von A (s. Folie 139 ff. von Mathe 1). Sind auch die Werte $\pm\infty$ als Suprema und Infima zugelassen und wird definiert $\sup \emptyset := -\infty$ und $\inf \emptyset := \infty$, so gilt das Folgende.

Satz 3.1. *Für alle $A \subseteq \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$ gelten*

$$s < \sup A \Leftrightarrow \exists a \in A : s < a \quad \text{und} \quad \inf A < s \Leftrightarrow \exists a \in A : a < s.$$

3.2 Einschub: Limes superior und Limes inferior

Mit Hilfe von Supremum und Infimum lassen sich die unten stehenden Begriffe einführen.

Definition 3.2. Für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist der

– *Limes superior* von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \inf\left\{\sup\left\{x_k \middle|\, k \in \mathbb{N} \wedge n \leq k\right\} \middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

– *Limes inferior* von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \sup\left\{\inf\left\{x_k \middle|\, k \in \mathbb{N} \wedge n \leq k\right\} \middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Ähnlich wie für Grenzwerte konvergenter Folgen gibt es eine ε-Variante dieser Definition.

Satz 3.3. *Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$.*

(a) $s = \limsup_{n\to\infty} x_n$ *genau dann, wenn:*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in \,]0,\infty[: \quad & \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\colon n \leq k \Rightarrow \qquad x_k - s < \varepsilon \\ & \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon n \leq k\ \wedge\ -\varepsilon < x_k - s \end{aligned}$$

(b) $s = \liminf_{n\to\infty} x_n$ *genau dann, wenn:*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in \,]0,\infty[: \quad & \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\colon n \leq k \Rightarrow -\varepsilon < x_k - s \\ & \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N}\colon n \leq k\ \wedge \qquad x_k - s < \varepsilon \end{aligned}$$

Wichtig ist außerdem die Beziehung von Limes superior und inferior zum Grenzwert einer konvergenten Folge.

Satz 3.4. *Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.*

(a) $\liminf_{k\to\infty} x_k \leq \limsup_{k\to\infty} x_k$.

(b) Gleichheit in (a) gilt genau dann, wenn $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, in welchem Fall, dann $\liminf_{k\to\infty} x_k$ *und* $\limsup_{k\to\infty} x_k$ *mit* $\lim_{k\to\infty} x_k$ *übereinstimmen.*

3.3 Einschub: Wurzelkriterium

Der Limes superior kann zur Formulierung des Quotientenkriteriums (Mathe 1, Folie 103) benutzt werden oder für das folgende weitere Konvergenzkriterium für Reihen.

Satz 3.5. *Für jede Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gilt: Liegt* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

– *in $[0,1[$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut in $\mathbb{K}$.*
– *in $]1,\infty]$, so divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.*

Das Wurzelkriterium kann genutzt werden um den Definitionsbereich der von einer formalen Potenzreihe induzierten Funktion einzugrenzen.

3.4 Konvergenzradius einer formalen Potenzreihe

Und zwar führt es zu folgendem Begriff.

Satz 3.6. *Für jedes $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n \in \mathbb{K}[[Z]]$ existiert genau ein $\rho_A \in [0,\infty]$ mit der Eigenschaft, dass für alle $z \in \mathbb{K}$*

– *mit $|z| < \rho_A$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $\mathbb{K}$ absolut konvergiert,*
– *mit $\rho_A < |z|$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ in $\mathbb{K}$ divergiert.*

Definition 3.7. Das ρ_A aus Satz 3.6 wird der *Konvergenzradius* von $A \in \mathbb{K}[[Z]]$ genannt.

Im Folgenden seien $\mathbb{B} := \{z \in \mathbb{K} \wedge |z| < 1\}$ der offene und $\overline{\mathbb{B}} := \{z \in \mathbb{K} \wedge |z| \leq 1\}$ der geschlossene *Einheitsball* von $\mathbb{K}$.

Satz 3.8. $\rho_A\mathbb{B} \subseteq \operatorname{dom} \underline{A} \subseteq \rho_A\overline{\mathbb{B}}$ *für jedes $A \in \mathbb{K}[[Z]]$.*

Die folgende Methode zur Bestimmung des Konvergenzradius ist bekannt als *Formel von Cauchy und Hadamard.*

Satz 3.9. *Für jedes $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n \in \mathbb{K}[[Z]]$ gilt*

$$\rho_A = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

Durch Ausnutzen der Eigenschaften des Limes superior lässt sich folgende Verbesserung von Satz 2.3 beweisen.

Satz 3.10. *Für alle $A \in \mathbb{K}[[Z]]$ und $B \in \mathbb{K}[[Z]]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten*

$$\begin{aligned} \rho_{A+B} &\geq \min\{\rho_A, \rho_B\}, \\ \rho_{\lambda A} &= \rho_A, \\ \rho_{A\cdot B} &\geq \min\{\rho_A, \rho_B\}. \end{aligned}$$

Außerdem hat die formale Ableitung einer Potenzreihe denselben Konvergenzradius.

Satz 3.11. $\rho_{A'} = \rho_A$ *für jedes $A \in \mathbb{K}[[X]]$.*

4 Injektivität der Interpretation

Die Nullstellen einer nicht trivialen durch eine Potenreihe induzierten Funktion liegen diskret.

Lemma 4.1. *Für jedes $A \in \mathbb{K}[[Z]]$ mit $0 < \rho_A$, wofür 0 Häufungspunkt von $\underline{A}^{-1}(\{0\}) \cap \rho_A\mathbb{B}$ ist, gilt $A = 0$.*

Daraus folgt, dass die Abbildung $\mathbb{K}[[Z]] \to \{f \,|\, \exists D \subseteq \mathbb{K}\colon\ f\colon D \to \mathbb{K}\}$, $A \mapsto \underline{A}$, die Potenzreihen als Funktionen deutet, „ziemlich“ injektiv ist.

Satz 4.2. *Für alle $A \in \mathbb{K}[[Z]]$ und $B \in \mathbb{K}[[Z]]$ mit $0 < \rho := \min\{\rho_A, \rho_B\}$, wofür 0 ein Häufungspunkt von*

$$\{z \in \mathbb{K} \wedge \underline{A}(z) = \underline{B}(z)\} \cap \rho\mathbb{B}$$

ist, gilt $A = B$ (und damit insbesondere $\underline{A} = \underline{B}$).

5 Eigenschaften der Funktionen

Um die Eigenschaften von durch Potenzreihen induzierten Funktionen zu verstehen, bedarf es einer Ergänzung zu Mathe 2.

5.1 Einschub: Konvergenz von Funktionenfolgen

Aus Mathe 2, Folien 574, 577 sind zwei Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen bekannt.

Definition 5.1. Es seien X eine Menge, (Y, d_Y) ein metrischer Raum, $f_n\colon X \to Y$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon X \to Y$. Dann heißt die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann

(a) *punktweise d_Y-konvergent* gegen f, wenn

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon \in \,]0,\infty[\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\colon\ n \leq k \ \Rightarrow \qquad d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

(b) *gleichmäßig d_Y-konvergent* gegen f, wenn

$$\forall \varepsilon \in \,]0,\infty[\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\colon\ n \leq k \ \Rightarrow \forall x \in D\colon\ d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Hat der Definitionsbereich auch eine Metrik ist der folgende Konvergenzbegriff nützlich.

Definition 5.2. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f_n\colon X \to Y$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *d_X-lokal gleichmäßig d_Y-konvergent*, wenn es für jedes $x \in X$ eine d_X-Umgebung U von x gibt, wofür $(f_n|_U)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig d_Y-konvergiert.

Die gleichmäßige Konvergenz von $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen lässt sich auch mit Hilfe des nächsten Begriffs ausdrücken (siehe Mathe 2, Folie 574).

Definition 5.3. Für jede Menge X und jedes $f\colon X \to \mathbb{K}$ sei $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \,|\, x \in X\}$. Gilt $\|f\|_\infty < \infty$, heißt $\|f\|_\infty$ die *Supremumsnorm* von f.

Für Funktionenreihen existiert in Gestalt des Majorantenkriteriums von Weierstraß ein wichtiges hinreichendes Kriterium für gleichmäßige Konvergenz.

Satz 5.4. *Es seien X eine Menge und $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wenn eine in $\mathbb{R}$ konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $\|f_n\|_\infty \leq a_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ existiert, ist $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent.*

5.2 Einschub: Stetigkeit und Funktionenfolgen

Die folgende Aussage wurde in Mathe 2, Folie 575 ff. bewiesen.

Satz 5.5. *Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $f_n\colon X \to Y$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon X \to Y$. Ist f_n eine d_X-d_Y-stetige Funktion für jedes $n \in \mathbb{N}$ und ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zumindest d_X-lokal gleichmäßig d_Y-konvergent gegen $f\colon X \to Y$, so ist f auch d_X-d_Y-stetig.*

5.3 Einschub: Differenzierbarkeit und Funktionenfolgen

Mit $\mathbb{K}$-Differenzierbarkeit und $\mathbb{K}$-Ableitung ist im Folgenden für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die reelle Differenzierbarkeit bzw. Ableitung im Sinne von Mathe 1, Folie 213 gemeint und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die komplexe im Sinne von Mathe 4, Definition 1.1.1.

Satz 5.6. *Es seien X konvex und perfekt in $\mathbb{K}$, ferner $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ stetig $\mathbb{K}$-differenzierbar mit $\mathbb{K}$-Ableitung f_n' für jedes $n \in \mathbb{N}$ sowie f und g Funktionen $X \to \mathbb{K}$. Konvergieren $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen g, so ist f stetig $\mathbb{K}$-differenzierbar mit $\mathbb{K}$-Ableitung g'.*

5.4 Eigenschaften von durch Potenzreihen induzierten Funktionen

Zusammen mit dem Weierstraßschen Majorantenkriterium (Satz 5.4) ergibt sich aus Satz 5.5.

Satz 5.7. *$\underline{A}|_{\rho_A\mathbb{B}}$ ist stetig für jedes $A \in \mathbb{K}[[Z]]$.*

Ebenfalls mit Hilfe des Weierstraßsche Majorantenkriterium folgt außerdem aus Satz 5.6

Satz 5.8. *Für jedes $A \in \mathbb{K}[[Z]]$ und $B := A'$ ist $\underline{A}|_{\rho_A\mathbb{B}}$ eine $\mathbb{K}$-differenzierbare Funktion mit $\mathbb{K}$-Ableitung $B|_{\rho_A\mathbb{B}}$.*

Daraus lässt sich sofort schließen, dass durch Potenzreihen induzierte Funktionen $\mathbb{K}$-glatt sind.

Satz 5.9. *$\underline{A}|_{\rho_A\mathbb{B}}$ ist unendlich oft $\mathbb{K}$-differenzierbar und A ist gleich der $\mathbb{K}$-Taylorreihe von $\underline{A}|_{\rho_A\mathbb{B}}$ in 0.*