Mathematik 4 - Anleitung 3

Im Folgenden einige Bemerkungen zu konformen Abbildung, inklusive derer, die ich in der dritten Sitzung der Anleitung zu den Übungen von Mathematik 4 für Studierende der Physik am 19.4.2024 gegeben habe.

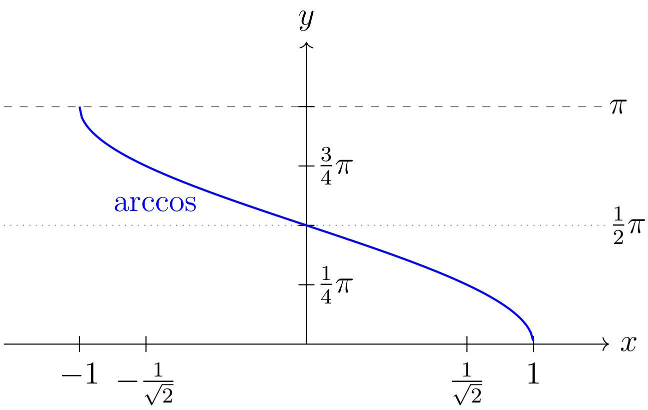
Konforme Abbildungen

„Konforme" Abbildungen im Sinne der Vorlesung sind *winkeltreue*.

1 Erinnerung: Winkel und Orientierung

1.1 Winkel

Winkel wurden in Mathe 2 auf Folie 493 eingeführt. Die Definition greift auf arccos, den Hauptzweig des Arkuskosinus (s. Mathe 1, Folie 200), zurück, die Funktion $[-1, 1] \to [0, \pi]$, die den Kosinus cos umkehrt.



Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (s. Mathe 2, Folie 491) garantiert, dass die Zahl im Argument des Arkuskosinus in der nächsten Definition immer zu $[-1, 1]$ gehört.

Definition 1.1. Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ein $\mathbb{R}$-Skalarprodukt, d.h. eine positiv definite symmetrische $\mathbb{R}$-Bilinearform (s. Mathe 2, Folien 483, 485, 488) auf V, und $\|\cdot\|$ die von $\langle\cdot|\cdot\rangle$ induzierte $\mathbb{R}$-Norm auf V (s. Mathe 2, Folie 490). Für je zwei Vektoren $v_1 \in V\backslash\{0\}$ und $v_2 \in V\backslash\{0\}$ wird die reelle Zahl

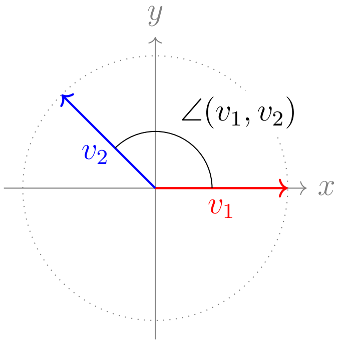
$$\angle(v_1, v_2) := \arccos\left(\frac{\langle v_1|v_2\rangle}{\|v_1\|\,\|v_2\|}\right)$$

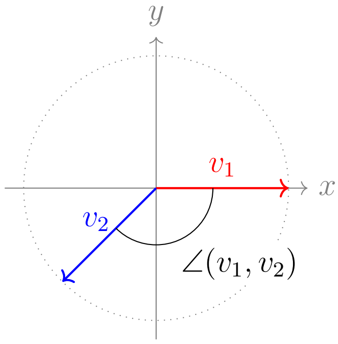
der *Winkel* zwischen v_1 und v_2 *bezüglich* $\langle\cdot|\cdot\rangle$ genannt.

Dieser Winkelbegriff hat einen wichtigen Unterschied zu dem anschaulichen.

Bemerkung 1.2. Es gibt nach dieser Definition *keine* überstumpfen Winkel! Winkel sind immer Zahlen zwischen 0 und π.

Zum Beispiel stehen zu $v_1 = (1, 0)$ beide $v_2 \in \{(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$ im gleichen Winkel $\frac{3}{4}\pi$.





Dieser Winkelbegriff nimmt also stets denjenigen der zwei „Winkel“ zwischen zwei Vektoren, der kleiner gleich 180° ist.

1.2 Orientierung

Das Konzept der Orientierung wurde in Mathe 2 auf Folien 446 ff. eingeführt.

Definition 1.3. Es seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension $n \in \mathbb{N}$. Eine *Orientierung* auf V ist eine Äquivalenzklasse $\mathcal{O}$ der Äquivalenzrelation $\sim$ (im Sinne von Mathe 2, Folie 442) auf der Menge der geordneten $\mathbb{R}$-Basen von V, die für je zwei geordnete $\mathbb{R}$-Basen B und B' genau dann $B \sim B'$ erfüllt, wenn die darstellende Matrix $M_B^{B'}(\mathrm{id}_V)$ der Identität id_V auf V bezüglich B bzw. B' (im Sinne von Mathe 1, Folie 362) eine positive Determinante hat.

Der Begriff der Orientierung ergibt anders als der des Winkels keinen Sinn in unendlich-dimensionalen Vektorräumen.

Satz 1.4. *Ist $V \neq \{0\}$, so hat die Äquivalenzrelation $\sim$ auf V aus Definition 1.3 genau zwei Äquivalenzklassen.*

Beispiel 1.5. In $\mathbb{R}^2$ gehören die geordneten Basen $B = ((1, 0), (0, 1))$ und $B' = ((0, 1), (1, 0))$ zu verschiedenen Orientierungen, da

$$\det(M_B^{B'}(\mathrm{id}_V)) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Wir kennen außerdem bereits die folgende Definition von Mathe 2, Folie 449 als „kanonische“ Orientierung.

Definition 1.6. Für alle $n \in \mathbb{N}$ heißt die Orientierung des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^n$, die die Standardbasis enthält die *Standardorientierung* von $\mathbb{R}^n$.

2 Erinnerung: Orientierungserhaltung

In der Literatur wird der Begriff der Konformität im Sinne der Vorlesung oft verbunden mit dem der Orientierungserhaltung.

2.1 Orientierungserhaltende lineare Abbildungen

Orientierungserhaltende lineare Abbildungen wurden in dem Spezialfall von linearen Automorphismen in Mathe 2, Folie 448 eingeführt.

Definition 2.1. Es seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume derselben Dimension $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $X \in \{V, W\}$ ferner $\mathcal{O}_X$ eine Orientierung von X. Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L\colon V \to W$ heißt genau dann *orientierungserhaltend bezüglich* $\mathcal{O}_V$ *und* $\mathcal{O}_W$, wenn sie bijektiv ist und es geordnete Basen $B_V \in \mathcal{O}_V$ und $B_W \in \mathcal{O}_W$ mit $\det(M_{B_V}^{B_W}(L)) > 0$ gibt.

Bemerkung 2.2. In Definition 2.1 ließe sich äquivalent fordern, dass $\det(M_{B_V}^{B_W}(L)) > 0$ für *alle* geordneten Basen $B_V \in \mathcal{O}_V$ und $B_W \in \mathcal{O}_W$ gelte.

2.2 Orientierungserhaltende nicht notwendigerweise lineare Abbildungen

Im Zusammenhang mit orientierten Mannigfaltigkeiten ist uns sogar bereits ein komplizierter Begriff (s. Mathe 3, Definition 2.5.5) als der folgende bekannt. Die Definition einer allgemeinen orientierungserhaltenden Abbildung ist, obwohl es vielleicht so erscheint, nicht zyklisch, da die totale $\mathbb{R}$-Ableitung (s. Mathe 2, Folien 630 f.) eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist, für die also der Begriff der Orientierungserhaltung bereits nach Definition 3.1 erklärt ist.

Definition 2.3. Es seien $\{m, n\} \subseteq \mathbb{N}$ und X perfekt in $\mathbb{R}^m$ sowie $x_0 \in X$. Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^n$ heißt genau dann *orientierungserhaltend* in x_0, wenn f in x_0 total $\mathbb{R}$-differenzierbar ist und die totale $\mathbb{R}$-Ableitung $Df(x_0)$ von f in x_0 eine orientierungserhaltende Abbildung bezüglich der Standardorientierungen von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$ ist.

Bemerkung 2.4. Für $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen fallen die beiden Definitionen 2.1 und 2.3 zusammen, da eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung in jedem Punkt total $\mathbb{R}$-differenzierbar und gleich ihrer totalen $\mathbb{R}$-Ableitung ist.

Satz 2.5. *Unter den Voraussetzungen von Definition 2.3 ist f genau dann orientierungserhaltend in x_0, wenn f dort total differenzierbar ist und seine Jacobimatrix (siehe Mathe 2, Folie 634) eine echt positive Determinante hat.*

3 Konformität

3.1 Konforme lineare Abbildungen

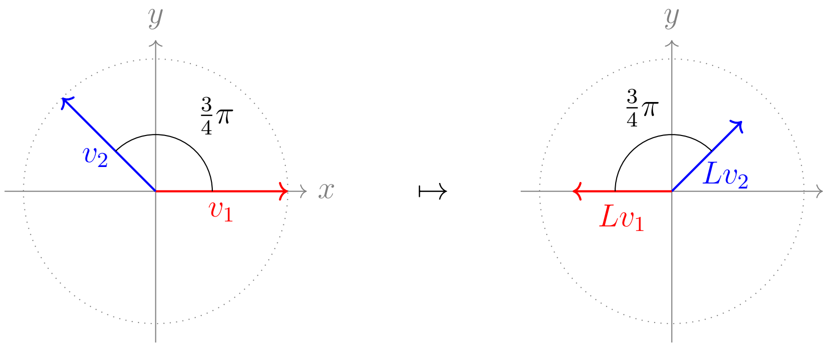
Im Sinne der Vorlesung ist eine lineare Abbildung konform, wenn sie Winkel erhält. Die Forderung der Injektivität in der nächsten Definition garantiert, dass die dortigen Winkel auch tatsächlich definiert sind.

Definition 3.1. Es seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume und für jedes $X \in \{V, W\}$ ferner $\langle\cdot|\cdot\rangle_X$ ein $\mathbb{R}$-Skalarprodukt auf X mit induzierten Winkeln $\angle_X$ und Norm $\|\cdot\|_X$. Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L\colon V \to W$ heißt genau dann *konform bezüglich* $\langle\cdot|\cdot\rangle_V$ *und* $\langle\cdot|\cdot\rangle_W$, wenn sie injektiv ist und für alle $v_1 \in V\backslash\{0\}$ und $v_2 \in V\backslash\{0\}$ gilt:

$$\angle_W(Lv_1, Lv_2) = \angle_V(v_1, v_2).$$

Insbesondere ergibt der Begriff auch Sinn für lineare Abbildungen zwischen unendlichdimensionalen Vektorräumen.

Bemerkung 3.2. Anschaulich besteht eine konforme lineare Abbildung im Allgemeinen aus einer Kombination von Drehungen, gleichmäßigen Streckungen und – wichtigerweise – Spiegelungen. So ist zum Beispiel die Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die $v_1 = (1, 0)$ und $v_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ auf $Lv_1 = (-\frac{3}{4}, 0)$ bzw. $Lv_2 = (\frac{3}{8\sqrt{2}}, \frac{3}{8\sqrt{2}})$ abbildet, konform.



Zwar ist die Basis (v_1, v_2) positiv und die Basis (Lv_1, Lv_2) negativ orientiert, doch der Winkel von $\frac{3}{4}\pi$ zwischen den Basisvektoren bleibt erhalten.

Wie die der nächste Satz zeigt, ist eine lineare Abbildung schon bereits genau dann konform, wenn sie rechte Winkel erhält. Das wiederum ist äquivalent dazu, dass sie ein positives Vielfaches einer Isometrie ist.

Satz 3.3. *Unter den Voraussetzungen von Definition 3.1 sind äquivalent:*

(i) L ist konform bezüglich $\langle\cdot|\cdot\rangle_V$ und $\langle\cdot|\cdot\rangle_W$.

(ii) Für alle $v_1 \in V\backslash\{0\}$ und $v_2 \in V\backslash\{0\}$ mit $\langle v_1|v_2\rangle_V = 0$ ist $\langle Lv_1|Lv_2\rangle_W = 0$.

(iii) Es gibt ein solches $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, dass für alle $v \in V$ gilt: $\|Lv\|_W = \rho\,\|v\|_V$.

(iv) Es gibt ein solches $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, dass alle $(v_1, v_2) \in V^2$ gilt: $\langle Lv_1|Lv_2\rangle_W = \rho^2\,\langle v_1|v_2\rangle_V$.

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Ist $\langle v_1|v_2\rangle = 0$, so gilt $\angle(v_1, v_2) = \frac{\pi}{2}$ und deshalb wegen $\angle(v_1, v_2) = \angle(Lv_1, Lv_2)$ nach (i) auch $\angle(Lv_1, Lv_2) = \frac{\pi}{2}$, also $\langle Lv_1|Lv_2\rangle = 0$.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)“: Vorab eine Feststellung: Für alle $(v_1, v_2) \in V^2$ mit $\|v_1\| = \|v_2\|$ ist nach der dritten binomischen Formel $\langle v_1+v_2|v_1-v_2\rangle = \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2 = 0$. Aus (ii) folgt daraus auf die gleiche Weise $0 = \langle L(v_1+v_2)|L(v_1-v_2)\rangle = \|Lv_1\|^2 - \|Lv_2\|^2$, also $\|Lv_1\| = \|Lv_2\|$.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Für $V = \{0\}$ ist die Behauptung klar. Sei also $V \neq \{0\}$. Dann existiert $v_0 \in V\backslash\{0\}$, sodass sich $\rho := \frac{\|Lv_0\|}{\|v\|}$ definieren lässt. Es folgen

$$\|v\| = \left\| \|v\| \frac{v_0}{\|v_0\|} \right\| \quad \text{und daher} \quad \|Lv\| = \left\| L\left(\|v\| \frac{v_0}{\|v_0\|} \right) \right\| = \rho \, \|v\|.$$

„(iii) $\Rightarrow$ (iv)“: Für alle $(v_1, v_2) \in V^2$ folgt aus der Polarisationsformel und aus (iii)

$$\begin{aligned} \langle Lv_1 | Lv_2 \rangle &= \tfrac{1}{2} \left(\|Lv_1\|^2 + \|Lv_1\|^2 - \|L(v_1 - v_2)\|^2 \right) \\ &= \tfrac{1}{2} \left(\rho^2 \, \|v_1\|^2 + \rho^2 \, \|v_1\|^2 - \rho^2 \, \|v_1 - v_2\|^2 \right) \\ &= \rho^2 \, \langle v_1 | v_2 \rangle . \end{aligned}$$

„(iv) $\Rightarrow$ (i)“: Für alle $v_1 \in V\backslash\{0\}$ und $v_2 \in V\backslash\{0\}$ impliziert (iv) die Gleichung $\|Lv_i\|^2 = \langle Lv_i | Lv_i \rangle = \rho^2 \, \langle v_i | v_i \rangle = \rho^2 \, \|v_i\|^2$ und daher $\|Lv_i\| = \rho \|v_i\|$ für alle $i \in \{1, 2\}$. Daraus folgt

$$\cos(\angle(Lv_1, Lv_2)) = \frac{\langle Lv_1 | Lv_2 \rangle}{\|Lv_1\| \|Lv_2\|} = \frac{\rho^2 \, \langle v_1 | v_2 \rangle}{\rho \, \|v_1\| \, \rho \, \|v_2\|} = \frac{\langle v_1 | v_2 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} = \cos(\angle(v_1, v_2))$$

und daher $\angle(Lv_1, Lv_2) = \angle(v_1, v_2)$. □

Im Fall von kartesischen Räumen lassen sich konforme lineare Abbildungen besonders einfach bestimmen.

Satz 3.4. *Für alle $\{m, n\} \subseteq \mathbb{N}$ ist die durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ induzierte $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ genau dann konform bezüglich der Standardskalarprodukte von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$, wenn ein $\rho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $A^{\mathrm{t}} A = \rho^2 \, I$ existiert, wobei I die reelle $m \times m$-Einheitsmatrix ist.*

Beweis. Für alle $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt $\langle L_A v_1 | L_A v_2 \rangle = \langle Av_1 | Av_2 \rangle = \langle v_1 | A^{\mathrm{t}} A v_2 \rangle$. Daher folgt die Behauptung sofort aus der Äquivalenz von (i) und (iv) in Satz 3.3. □

Bemerkung 3.5. Es ist wichtig zu beachten, dass in der Literatur – anders als in der Vorlesung – unter einer linearen konformen Abbildung ein $\mathbb{R}$-linearer Automorphismus von $\mathbb{R}^n$ verstanden wird, der konform im Sinne von Definition 3.1 bezüglich der Standardskalarprodukte ist *und* der zugleich die Standardorientierung von $\mathbb{R}^n$ erhält. Ist von diesen beiden Bedingungen nur die erste und nicht die zweite gegeben, ist häufig von einer *antikonformen* Abbildung die Rede.

3.2 Konforme nicht notwendigerweise lineare Abbildungen

Die folgende Definition einer allgemeinen konformen Abbildung ist, obwohl es vielleicht so erscheint, nicht zyklisch, da die totale $\mathbb{R}$-Ableitung (s. Mathe 2, Folien 630 f.) eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist, für die also der Begriff der Konformität bereits nach Definition 3.1 erklärt ist.

Definition 3.6. Es seien $\{m, n\} \subseteq \mathbb{N}$ und X perfekt in $\mathbb{R}^m$ sowie $x_0 \in X$. Eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}^n$ heißt genau dann *konform* in x_0, wenn f in x_0 total $\mathbb{R}$-differenzierbar ist und die totale $\mathbb{R}$-Ableitung $Df(x_0)$ von f in x_0 eine konforme Abbildung bezüglich der Standardskalarprodukte von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$ ist.

Eine nicht notwendigerweise lineare Abbildung wird demnach konform genannt, wenn ihre linearen Approximationen Winkel erhalten.

Bemerkung 3.7. Für $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen fallen die beiden Definitionen 3.1 und 3.6 von Konformität zusammen, da eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung in jedem Punkt total $\mathbb{R}$-differenzierbar und gleich ihrer totalen $\mathbb{R}$-Ableitung ist.

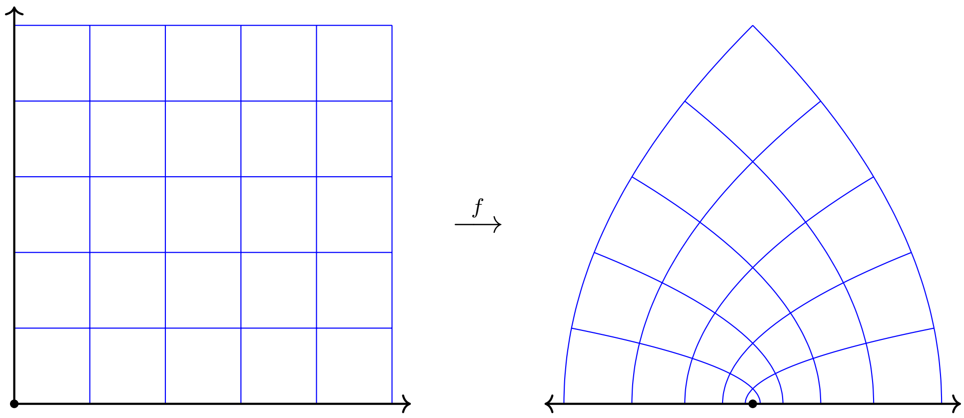
Beispiel 3.8. Ein einfaches Beispiel für eine konforme Abbildung $f :]0, \infty[^2 \to \mathbb{R}^2$ ist die mit $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ für alle $(x, y) \in]0, \infty[^2$. Ihre Jacobimatrix (siehe Mathe 2, Folie 634), d.h. die Matrixdarstellung der totalen Ableitung bezüglich der Standardbasen, hat in jedem Punkt $(x, y) \in]0, \infty[^2$ die Form

$$A := Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix},$$

sodass gilt:

$$A^{\mathrm{t}} A = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 4(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Konforme Abbildungen sind daran zu erkennen, dass sie die Schnittwinkel von Kurven erhalten. Insbesondere wird ein kartesisches Gitter auf ein krummliniges Gitter abgebildet, in dem sich die Bilder der Gitterlinien senkrecht schneiden.



4 Zusammenhang mit holomorphen Funktionen

Konforme Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stehen in einem engen Zusammenhang mit holomorphen.

Satz 4.1. *Es seien U perfekt in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in U$. Betrachtet als Abbildung $\mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^2$ ist eine komplexe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ genau dann konform in z_0, wenn von den komplexen Funktionen $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$ und $\mathrm{Im}(f) + i\mathrm{Re}(f)$ in z_0 zumindest eine $\mathbb{C}$-differenzierbar ist und ihre $\mathbb{C}$-Ableitung dort ungleich null ist.*

Bemerkung 4.2. Sind für eine komplexe Funktion f sowohl $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$ als auch $\mathrm{Im}(f) + i\mathrm{Re}(f)$ holomorph, ist f konstant.

Umgekehrt gilt insbesondere das Folgende.

Satz 4.3. *Sei U perfekt in $\mathbb{C}$ und die komplexe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ sei $\mathbb{C}$-differenzierbar in z_0 mit $\mathbb{C}$-Ableitung $f'(z_0)$. Dann ist f betrachtet als Abbildung $\mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^2$ genau dann konform, wenn $f'(z_0) \neq 0$ gilt. Ist das der Fall, so ist f außerdem als Abbildung $\mathbb{R}^2 \supseteq U \to \mathbb{R}^2$ orientierungserhaltend.*