Mathematik 4 - Anleitung 4

Im Folgenden einige Bemerkungen zu Ketten, Zykeln und Homologie, inklusive derer, die ich in der vierten Sitzung der Anleitung zu den Übungen von Mathematik 4 für Studierende der Physik am 26.4.2024 gegeben habe.

Ketten, Zykel, Homologie

1 Freie abelsche Gruppen

Gruppen kennen Sie evtl. schon aus Mathe 1, Folien 401 ff. „Abelsch" ist in diesem Zusammenhang dasselbe wie „kommutativ" von Folie 402.

Definition 1.1. Eine *abelsche Gruppe* $(G, +)$ besteht aus einer Menge G, der *zugrunde liegenden Menge*, und einer Abbildung $+ : G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 + g_2$, der *Verknüpfung*, mit folgenden Eigenschaften:

(a) $g_1 + (g_2 + g_3) = (g_1 + g_2) + g_3$ für alle $(g_1, g_2, g_3) \in G^3$,
(b) $g_1 + g_2 = g_2 + g_1$ für alle $(g_1, g_2) \in G^3$,
(c) es existiert ein solches $0 \in G$, das *neutrale Element*, dass für alle $g \in G$ gelten:
  (i) $g + 0 = g = 0 + g$,
  (ii) es existiert $-g \in G$, das *zu g inverse Element*, mit $g + (-g) = 0 = (-g) + g$.

Beispiele 1.2. (a) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit ihrer Addition.
(b) Jeder Körper mit seiner Addition, insb. $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.
(c) Jeder Vektorraum über jedem Körper mit der Addition von Vektoren, z.B. $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$.
(d) $(\{\emptyset, 4\}, \boxplus)$ mit $\emptyset \boxplus 4 := 4 \boxplus 4 := \emptyset$ und $\emptyset \boxplus 4 := 4$.

Eine abelsche Gruppe hat nur genau ein neutrales Element und jedes Element nur genau ein Inverses.

Notation 1.3. In einer abelschen Gruppe $(G, +)$ mit neutralem Element 0_G wird für $(g, g') \in G^2$ und $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ abgekürzt:

$$g' - g := g' + (-g), \qquad 0 \cdot g = 0_G, \qquad m \cdot g := \underbrace{g + \ldots + g}_{m\text{-mal}}.$$

Definition 1.4. Seien $(G, +_G)$ und $(H, +_H)$ abelsche Gruppen mit neutralen Elementen 0_G bzw. 0_H. Ein *Gruppenhomomorphismus* f von $(G, +_G)$ zu $(H, +_H)$ ist eine Abbildung $G \to H$ mit $f(0_G) = 0_H$ und $f(g_1 +_G g_2) = f(g_1) +_H f(g_2)$ für alle $(g_1, g_2) \in G^2$.

Sei X eine beliebige Menge.

Definition 1.5. Eine *freie abelsche Gruppe* über X besteht aus einer abelschen Gruppe $(G, +_G)$ und einer Abbildung $\iota : X \to G$ mit der Eigenschaft, dass für jede abelsche Gruppe $(H, +_H)$ und jede Abbildung $s : X \to H$ genau ein Gruppenhomomorphismus f von $(G, +_G)$ zu $(H, +_H)$ mit $f \circ \iota = s$ existiert.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, "s"'] & (G, +_G) \arrow[d, "\exists! f : \text{Gruppenhomomorphismus}"] & \text{abelsche Gruppe} \\ & (H, +_G) & \text{abelsche Gruppe} \end{tikzcd}$$

Die Abbildung ι ist dabei stets injektiv.

Satz 1.6. *Es existieren freie abelsche Gruppen über X.*

Beweis. Zum Beispiel ist

$$\mathbb{Z}[X] := \{f : X \to \mathbb{Z} \wedge |\{x \in X \wedge f(x) \neq 0\}| < \infty\}$$

zusammen mit der Operation $+ : \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$ mit der Eigenschaft, dass für alle $f_1 \in \mathbb{Z}[X]$ und $f_2 \in \mathbb{Z}[X]$ und alle $x \in X$ gilt:

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$$

eine freie abelsche Gruppe über X. □

Bemerkung 1.7. Mit freien abelschen Gruppen über X wird umgegangen wie mit anderen Objekten, die durch universelle Eigenschaften definiert sind, wie z.B. einem *Tensorprodukt* oder einem *äußeren Produkt* von Vektorräumen (s. Mathe 3, Abschnitt 2.1).

(a) Es wird so getan, als gäbe es nur eine einzige freie abelsche Gruppe.

(b) Die Abbildung ι wird unterschlagen und X wird als Teilmenge der freien abelschen Gruppe aufgefasst.

Fazit: In der freien abelschen Gruppe über X werden die Elemente von X wie „Variablen“ behandelt werden und sonst so gerechnet wie in $\mathbb{Z}$.

2 Singuläre Homologie

2.1 Simplizes

Sei $n \in \mathbb{N}$.

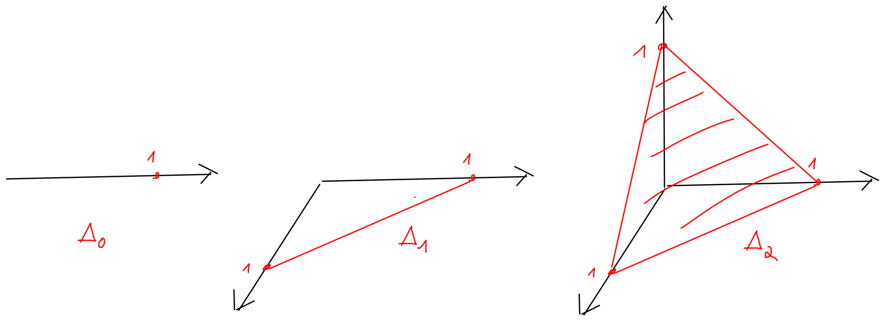
Definition 2.1. *n-Standardsimplex* heißt die Menge

$$\Delta_n := \{x \in [0, \infty[^{n+1} \wedge \textstyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Heute interessieren uns hauptsächlich die 0-, 1- und 2-Simplizes.

Beispiel 2.2.

- □ $\Delta_0 = \{1\} \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Punkt.
- □ $\Delta_1 = \{(t, 1-t) | \, t \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine Strecke.
- □ $\Delta_2 = \{(s, t, 1-s-t) | \, (s,t) \in [0,1]^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist ein gleichseitiges Dreieck.



Der „Rand“ des n-Simplex lässt sich als Vereinigung von $(n-1)$-Simplizes verstehen.

Definition 2.3. Ist $1 \leq n$, so heißt für jedes $j \in \{0, \dots, n\}$ die Abbildung $\partial_{n,j} : \Delta_{n-1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit

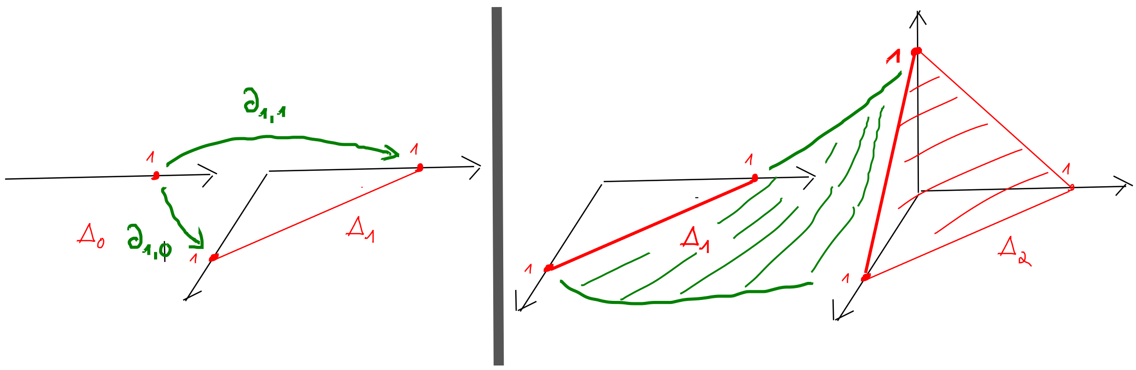
$$\partial_{n,j}(y) = \begin{cases} (0, y_2, \dots, y_n) & | \, j = 0 \\ (y_1, \dots, y_{j-1}, 0, y_{j+1}, \dots, y_n) & | \, 0 < j < n \\ (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) & | \, j = n \end{cases}$$

für alle $y \in \Delta^{n-1}$ die *j-te Seitenabbildung* von Δ_n.

Beispiel 2.4.

(a) $\partial_{1,0}$ und $\partial_{1,1}$ bilden das einzige Element 1 von Δ_0 auf die Endpunkte $(0,1)$ bzw. $(1,0)$ der Strecke Δ_1 ab.

(b) $\partial_{2,0}$ bildet die Strecke Δ_1 auf $\{(0, t, 1-t) | \, t \in [0,1]\}$ ab, eine der drei Seiten des Dreiecks Δ_2.



Der topologische Rand einer Teilmenge eines metrischen Raumes ist die Differenzmenge aus Abschluss und Innerem (s. Mathe 2, Folie 546).

Satz 2.5. *(a) Δ_n ist abgeschlossen und hat den topologischen Rand*

$$\Delta_n := \{x \in [0,\infty[^{n+1} \wedge \sum_{k=1}^{n+1} x_k = 1 \wedge \exists j \in \{0,\dots,n\}\colon\ x_j = 0\}.$$

(b) Ist $1 \le n$, so ist für jedes $j \in \{0,\dots,n\}$ die Abildung $\partial_{n,j} : \Delta_{n-1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ injektiv und ihr Bild liegt im topologische Rand von Δ_n.

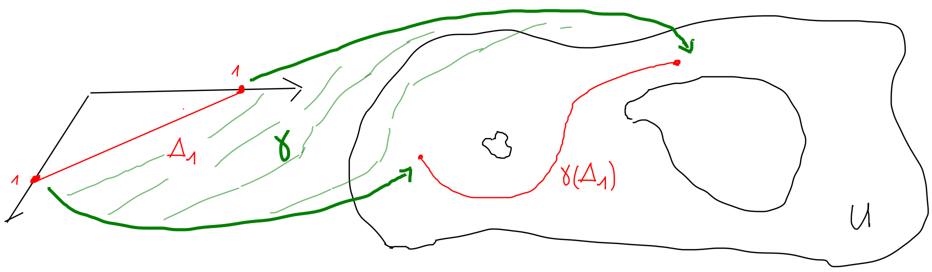
(c) Ist $1 \le n$, so ist die Vereinigung der Bilder aller $\partial_{n,0},\dots,\partial_{n,n}$ der topologische Rand von Δ_n.

2.2 Singuläre Simplizes

Es seien U ein metrischer Raum und $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.6. Ein *singuläres n-Simplex in U* ist eine stetige Abbildung $\Delta_n \to U$.

Beispiel 2.7. Für $U \subseteq \mathbb{C}$ ist ein singuläres 1-Simplex in U effektiv ein stetiger Weg in U (bloß mit ungewöhnlichem Definitionsbereich).



Satz 2.8. *Ist $1 \le n$, so ist für jedes singuläre n-Simplex γ in U und jedes $j \in \{0,\dots,n\}$ die Abbildung $\gamma \circ \partial_{n,j}$ ein singuläres $(n-1)$-Simplex in U.*

Beweis. $\partial_{n,j}$ ist affin (linear plus konstante Verschiebung) und daher stetig. □

2.3 Singuläre Ketten, Ränder, Zyklen

Definition 2.9. (a) Es sei $C_n(U,\mathbb{Z})$ die freie abelsche Gruppe über der Menge der singulären n-Simplizes in U.

(b) Ein Element von $Z_n(U,\mathbb{Z})$ heißt *singuläre n-Kette* in U.

Beispiel 2.10. Für $U \subseteq \mathbb{C}$ besteht $C_0(U,\mathbb{Z})$ aus den formalen Linearkombinationen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ von komplexen Zahlen aus U, Und $C_1(U,\mathbb{Z})$ sind solche von (stetigen) Wegen in U. Und C_2 sind solche von (möglicherweise zu Strecken oder Punkten kollabierte) stetige Bilder von Dreiecken in U.

Definition 2.11. Der *Randoperator ∂_n von $Z_n(U,\mathbb{Z})$* der eindeutige Gruppenhomomorphismus $C_n(U,\mathbb{Z}) \to C_{n-1}(U,\mathbb{Z})$, der für alle singulären n-Simplizes γ in U erfüllt

$$\partial_n(\gamma) := \begin{cases} 0 & | \, n = 0 \\ \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \, \gamma \circ \partial_{n,j} & | \, 1 \le n. \end{cases}$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} Z_2(U,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_2} Z_1(U,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_1} Z_0(U,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_0} \{0\}$$

Beispiel 2.12. (a) Für ein singuläres 1-Simplex γ (d.h. einen Weg) in U ist die singuläre 0-Kette $\partial\gamma$ die formale Differenz $e_\gamma - a_\gamma$ aus dem Endpunkt e_γ und dem Anfangspunkt a_γ von γ.

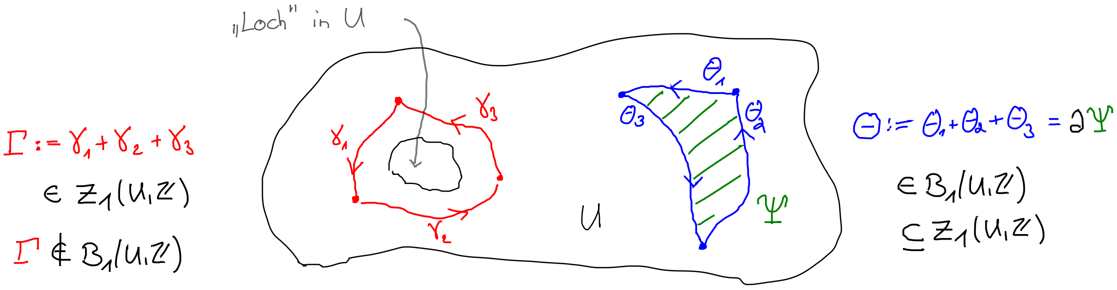
(b) Der Rand eines singulären 2-Simplex in U besteht ist die singuläre 1-Kette $\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3$ der drei Wege γ_i, die die Seiten des (stetig verformten) Dreiecks in U beschreiben.

Definition 2.13. (a) Ein Element von $B_n(U,\mathbb{Z}) := \{\partial\Psi \mid \Psi \in Z_{n+1}(U,\mathbb{Z})\}$ heißt *singulärer n-Rand* in U.

(b) Ein Element von $Z_n(U,\mathbb{Z}) := \{\Gamma \in Z_n(U,\mathbb{Z}) \wedge \partial\Gamma = 0\}$ heißt *singulärer n-Zykel* in U.

Sowohl $B_n(U,\mathbb{Z})$ als auch $Z_n(U,\mathbb{Z})$ sind mit der Einschränkung der Verknüpfung von $C_n(U,\mathbb{Z})$ selbst abelsche Gruppen.

Beispiel 2.14. Eine singuläre 1-Kette in U ist genau dann ein singulärer 1-Zykel, wenn jeder Punkt in U mit gleicher Häufigkeit als Anfangs- und als Endpunkt vorkommt. Insbesondere sind geschlossene Wege singuläre 1-Zykel.



Satz 2.15. *Ist $1 \le n$, so gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. D.h. $B_n(U,\mathbb{Z}) \subseteq Z_n(U,\mathbb{Z})$.*

Definition 2.16. Zwei singuläre n-Ketten Γ und Γ' *homolog*, wenn $\Gamma - \Gamma'$ ein singulärer n-Rand ist. Eine zu 0 homologe singuläre Kette heißt *nullhomolog*.

Satz 2.17. *Homolog zueinander zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf $C_n(U,\mathbb{Z})$ und auch auf $Z_n(U,\mathbb{Z})$.*

Definition 2.18. Die Menge der Äquivalenzklassen von $Z_n(U,\mathbb{Z})$ bezüglich der Äquivalenzrelation, homolog zu sein, heißt *n-te Homologiegruppe $H_n(U,\mathbb{Z})$* von U.

Tatsächlich ergibt sich durch Addition beliebiger Repräsentanten der Homologieklassen auch wieder auf $H_n(U,\mathbb{Z})$ die Strukture einer abelschen Gruppe.

Satz 2.19. *$H_0(U,\mathbb{Z})$ steht in Bijektion zur Menge der Komponenten von U.*

Satz 2.20. *Ist U zusammenhängend, so gilt genau dann $H_1(U,\mathbb{Z}) \cong \{0\}$, wenn U einfach zusammenhängend ist.*

Satz 2.21. *Ist U offen und beschränkt in $\mathbb{C}$ und hat $\mathbb{C}\backslash U$ genau $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ Komponenten, gilt $H_1(U,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^k$.*

3 Kurvenintegral und Windungszahl

Sei nun $U \subseteq \mathbb{C}$. Dann gibt es die Möglichkeit, mittels des komplexen Kurvenintegral hinreichend glatte 1-Ketten als Funktionale auf dem Raum von stetigen Funktionen $U \to \mathbb{C}$ aufzufassen.

Definition 3.1. Für alle singulären 1-Ketten $\Gamma = \sum_{k=1}^{\ell} m_k\,\gamma_k$ in U mit der Eigenschaft, dass γ_k für jedes $k \in \{1,\ldots,m\}$ ein C^1-Weg ist, sei für jedes stetige $f : U \to \mathbb{C}$

$$\int_\Gamma f := \sum_{k=1}^{\ell} m_k \int_{\gamma_k} f.$$

Aus dem Cauchyschen Integralsatz lassen sich insbesondere die folgende Aussagen ableiten.

Satz 3.2. *(a) Sei Γ ein singulärer 1-Zyklus in U, der sich aus C^1-Wegen zusammensetzt. Dann ist Γ genau dann null-homolog in U, wenn für jedes holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ gilt: $\int_\Gamma f = 0$.*

(b) Sei $f : U \to \mathbb{C}$. Dann ist f genau dann holomorph auf U, wenn für jeden in U nullhomologen singulären 1-Zyklus Γ in U, der sich aus C^1-Wegen zusammensetzt, gilt: $\int_\Gamma f = 0$.

Die Windungszahl bietet eine bemerkenswert einfache Möglichkeit zu entscheiden, wann zwei singuläre 1-Ketten homolog sind.

Satz 3.3. *Zwei singuläre 1-Ketten Γ und Γ' in U, die sich aus C^1-Wegen zusammensetzen sind genau dann homolog in U, wenn $\partial_1\Gamma = \partial_1\Gamma'$ und $j(z,\Gamma) = j(z,\Gamma')$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash U$.*